Matemática

1 O gráfico de uma função polinomial do primeiro grau passa pelos pontos de coordenadas (x, y) dados abaixo.

x	y
0	5
m	8
6	14
7	k

Podemos concluir que o valor de k + m é:

A 15,5
B 16,5
C 17,5
D 18,5
E 19,5

RESPOSTA: C

Como os pontos estão alinhados, podemos concluir que:

- O coeficiente angular dado pelo 3º e 4º pontos é igual ao coeficiente angular dado pelo 1º e 3º. Portanto:

$$\frac{k-14}{7-6} = \frac{14-5}{6-0} \quad \Rightarrow \quad k = 15{,}5\,.$$

- O coeficiente angular dado pelo 2º e 3º pontos é igual ao coeficiente angular dado pelo 1º e 3º.
- Logo:

$$\frac{14-8}{6-m} = \frac{14-5}{6-0} \quad \Rightarrow \quad m = 2$$

Portanto m + k = 17,5

2 Sandra fez uma aplicação financeira, comprando um título público que lhe proporcionou, após um ano, um montante de R$ 10 000,00. A taxa de juros da aplicação foi de 10% ao ano. Podemos concluir que o juro auferido na aplicação foi:

A R$ 1 000,00
B R$ 1 009,09
C R$ 900,00
D R$ 909,09
E R$ 800,00

RESPOSTA: D

Seja C o capital aplicado e J o juro auferido. Assim:

$$C + J = 10\,000 \quad \Rightarrow \quad C + C(0{,}10) = 10\,000 \quad \Rightarrow \quad C = \frac{10\,000}{1{,}1} = 9090{,}91$$

Portanto o juro auferido foi de $10\,000 - 9090{,}91 = 909{,}09$.

3 Em uma escola, a razão entre o número de alunos e o de professores é de 50 para 1.
Se houvesse mais 400 alunos e mais 16 professores, a razão entre o número de alunos e o de professores seria de 40 para 1.
Podemos concluir que o número de alunos da escola é:

A 1 000
B 1 050
C 1 100
D 1 150
E 1 200

RESPOSTA: E

Seja x o número de professores e y o número de alunos. Teremos:

- $\frac{y}{x} = \frac{50}{1} \ (I)$
- $\frac{y+400}{x+16} = \frac{40}{1} \ (II)$
- De (I) e (II) concluímos que $x = 24 \ \ e \ \ y = 1200$.

4 Uma pequena empresa fabrica camisas de um único modelo e as vende por R$ 80,00 a unidade. Devido ao aluguel e a outras despesas fixas que não dependem da quantidade produzida, a empresa tem um custo fixo anual de R$ 96 000,00. Além do custo fixo, a empresa tem que arcar com custos que dependem da quantidade produzida, chamados custos variáveis, tais como matéria-prima, por exemplo; o custo variável por camisa é R$ 40,00.
Em 2009, a empresa lucrou R$ 60 000,00. Para dobrar o lucro em 2010, em relação ao lucro de 2009, a quantidade vendida em 2010 terá de ser x% maior que a de 2009. O valor mais próximo de x é:

A 120
B 100
C 80
D 60
E 40

RESPOSTA: E

Sejam x e y as quantidades vendidas em 2009 e 2010 respectivamente. Assim:

- $60\ 000 = 80x - (96\ 000 + 40x) \quad \Rightarrow \quad x = 3\ 900$
- $120\ 000 = 80y - (96\ 000 + 40y) \quad \Rightarrow \quad y = 5\ 400$
- Variação porcentual das quantidades: $\dfrac{5\ 400 - 3\ 900}{3\ 900} = 38{,}46\%$.

5 Em um grupo de 300 pessoas sabe-se que:

- 50% aplicam dinheiro em caderneta de poupança.
- 30% aplicam dinheiro em fundos de investimento.
- 15% aplicam dinheiro em caderneta de poupança e fundos de investimento simultaneamente.

Sorteando uma pessoa desse grupo, a probabilidade de que ela não aplique em caderneta de poupança nem em fundos de investimento é:

A 0,05
B 0,20
C 0,35
D 0,50
E 0,65

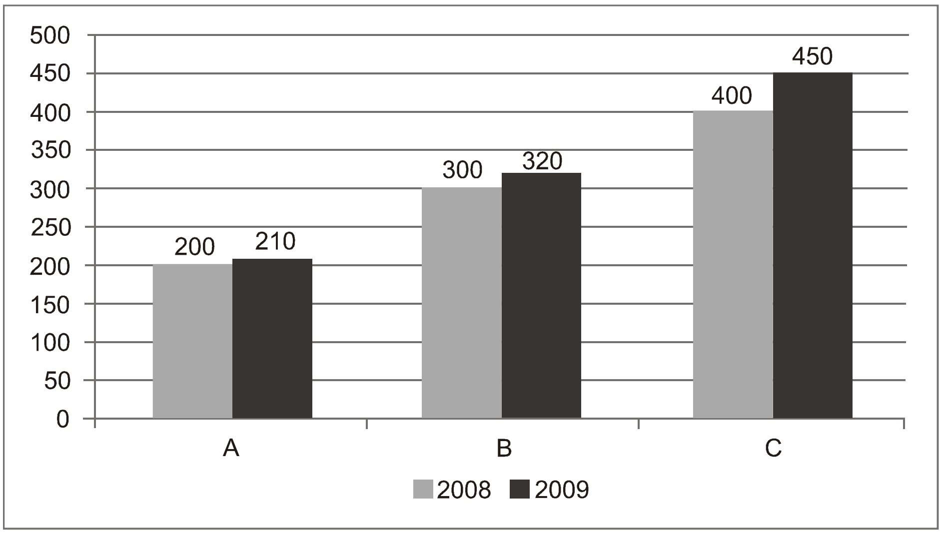
RESPOSTA: C

Como 15% do grupo fazem os dois tipos de aplicação, teremos $(0{,}15)300 = 45$ fazendo as duas aplicações.

- Como 50% aplicam em poupança, teremos $(0{,}50)300 = 150$ pessoas aplicando em caderneta de poupança. Assim, 150 – 45 = 105 pessoas aplicam só em caderneta de poupança.
- Como 30% aplicam em fundos, teremos $(0{,}30)300 = 90$ pessoas aplicando em fundos. Assim, 90 – 45 = 45 pessoas aplicam só em fundos.
- Logo o total de pessoas do grupo que não aplicam em poupança nem em fundos é 300 – 105 – 45 – 45 = 105.
- Portanto a probabilidade procurada é $\frac{105}{300} = 0{,}35$.

6 O gráfico abaixo apresenta os lucros anuais (em milhões de reais) em 2008 e 2009 de três empresas A, B e C de um mesmo setor.
A média aritmética dos crescimentos percentuais dos lucros entre 2008 e 2009 das três empresas foi de aproximadamente:

A 8,1%
B 8,5%
C 8,9%
D 9,3%
E 9,7%



RESPOSTA: A

Crescimento porcentual da empresa A: $\dfrac{210-200}{200} = 5\%$.

Crescimento porcentual da empresa B: $\dfrac{320-300}{300} = 6{,}67\%$.

Crescimento porcentual da empresa C: $\dfrac{450-400}{400} = 12{,}5\%$.

Média aritmética dos crescimentos: $\dfrac{5\% + 6{,}67\% + 12{,}5\%}{3} = 8{,}06\%$.

7 O gráfico de uma função quadrática $f(x)$ tem as seguintes características:

- O vértice é o ponto $(4,-1)$.
- Intercepta o eixo das abscissas no ponto $(5,0)$.

O ponto de intersecção do gráfico com o eixo das ordenadas é:

A (0,14)
B (0,15)
C (0,16)
D (0,17)
E (0,18)

RESPOSTA: B

- Como a abscissa do vértice é a média aritmética das raízes, e uma raiz é 5, concluímos que a outra raiz é 3; portanto a parábola intercepta o eixo das abscissas em (3,0) e (5,0).
- A forma fatorada da função, portanto, é: $f(x) = a(x-3)(x-5)$.
- Como o vértice é (4, -1), então, $-1 = a(4-3)(4-5) \quad \Rightarrow \quad a = 1$.
- Logo a função é $f(x) = 1(x-3)(x-5) = x^2 - 8x + 15$.
- A intersecção do gráfico com o eixo das ordenadas é o ponto $(0, f(0))$ e, como $f(0) = 15$, segue que o ponto procurado é $(0,15)$.

8 No plano cartesiano, uma circunferência, cujo centro se encontra no segundo quadrante, tangencia os eixos x e y.
Se a distância da origem ao centro da circunferência é igual a 4, a equação da circunferência é:

A $x^2 + y^2 + (2\sqrt{10})x - (2\sqrt{10})y + 10 = 0$

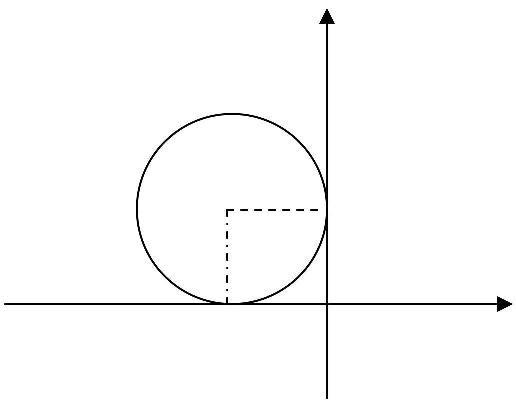
B $x^2 + y^2 + (2\sqrt{8})x - (2\sqrt{8})y + 8 = 0$

C $x^2 + y^2 - (2\sqrt{10})x + (2\sqrt{10})y + 10 = 0$

D $x^2 + y^2 - (2\sqrt{8})x + (2\sqrt{8})y + 8 = 0$

E $x^2 + y^2 - 4x + 4y + 4 = 0$

RESPOSTA: B



Chamando de r o raio da circunferência, teremos:

- Centro: $C(-r, r)$
- Pelo teorema de Pitágoras: $4^2 = r^2 + r^2 \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt{8}$
- Equação da circunferência: $(x + \sqrt{8})^2 + (y - \sqrt{8})^2 = 8$, ou seja, $x^2 + y^2 + 2\sqrt{8}x - 2\sqrt{8}y + 8 = 0$.

9 A previsão de vendas mensais de uma empresa para 2011, em toneladas de um produto, é dada por $f(x) = 100 + 0{,}5x + 3sen\dfrac{\pi\, x}{6}$, em que $x = 1$ corresponde a janeiro de 2011, $x = 2$ corresponde a fevereiro de 2011 e assim por diante.
A previsão de vendas (em toneladas) para o primeiro trimestre de 2011 é:
(Use a aproximação decimal $\sqrt{3} = 1{,}7$.)

A 308,55
B 309,05
C 309,55
D 310,05
E 310,55

RESPOSTA: D

- Janeiro de 2011: $f(1) = 100 + 0{,}5(1) + 3sen\dfrac{\pi}{6} = 100 + 0{,}5 + 1{,}5 = 102$.
- Fevereiro de 2011: $f(2) = 100 + 0{,}5(2) + 3sen\dfrac{2\pi}{6} = 100 + 1 + \dfrac{3\sqrt{3}}{2} = 101 + \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.
- Março de 2011: $f(3) = 100 + 0{,}5(3) + 3sen\dfrac{3\pi}{6} = 100 + 1{,}5 + 3 = 104{,}5$.
- Total do primeiro trimestre: $102 + 101 + \dfrac{3\sqrt{3}}{2} + 104{,}5 = 307{,}5 + \dfrac{3\sqrt{3}}{2} = 307{,}5 + \dfrac{3(1{,}7)}{2} = 310{,}05$.

10 O sistema linear nas incógnitas x, y e z:

$$\begin{cases} x - y = 10 + z \\ y - z = 5 - x \\ z + x = 7 + y \end{cases}$$

pode ser escrito na forma matricial $AX = B$, em que:

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \; e \; B = \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Nessas condições, o determinante da matriz A é igual a:

A 5
B 4
C 3
D 2
E 1

RESPOSTA: B

O sistema pode ser escrito sob a forma $\begin{cases} x - y - z = 10 \\ x + y - z = 5 \\ x - y + z = 7 \end{cases}$ e a matriz A é $\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ e o determinante de A vale $\det(A) = 1+1+1+1-1+1 = 4$.

11 As saladas de frutas de um restaurante são feitas misturando pelo menos duas frutas escolhidas entre: banana, laranja, maçã, abacaxi e melão.
Quantos tipos diferentes de saladas de frutas podem ser feitos considerando apenas os tipos de frutas e não as quantidades?

A 26
B 24
C 22
D 30
E 28

RESPOSTA: A

Cada tipo é uma combinação de 5 elementos tomados n a n, em que n pode ser: 2 ou 3, ou 4, ou 5.
Portanto:

$$\binom{5}{2}+\binom{5}{3}+\binom{5}{4}+\binom{5}{5}=\frac{5!}{2!\,3!}+\frac{5!}{3!\,2!}+\frac{5!}{4!\,1!}+\frac{5!}{5!\,0!}=10+10+5+1=26\,.$$

12 No plano cartesiano, a reta tangente à circunferência de equação $x^2 + y^2 = 8$, no ponto P de coordenadas (2, 2), intercepta a reta de equação $y = 2x$ no ponto:

A $(\frac{7}{6}, \frac{14}{6})$

B $(\frac{6}{5}, \frac{12}{5})$

C $(\frac{5}{4}, \frac{10}{4})$

D $(\frac{4}{3}, \frac{8}{3})$

E $(\frac{3}{2}, 3)$

RESPOSTA: D

- Como o centro da circunferência é C(0, 0) e o ponto P pertence à circunferência, o coeficiente angular da reta CP é $\frac{2-0}{2-0} = 1$.
- A reta t tangente à circunferência é perpendicular à reta CP, portanto seu coeficiente angular m é tal que $m.1 = -1$. Logo $m = -1$.
- Assim, a equação da reta t é: $y - 2 = -1(x - 2)$, ou seja, $y = -x + 4$.
- O ponto em que a reta t intercepta a reta $y = 2x$ é obtido a partir de:

$$\begin{cases} y = -x + 4 \\ y = 2x \end{cases}$$

cuja solução é $x = \frac{4}{3}$ e $y = \frac{8}{3}$.

13 O polinômio $P(x) = x^4 - 5x^3 + 3x^2 + 5x - 4$ tem o número 1 como raiz dupla.
O valor absoluto da diferença entre as outras raízes é igual a:

A 5
B 4
C 3
D 2
E 1

RESPOSTA: A

Como 1 é raiz dupla, o polinômio pode ser escrito sob a forma $P(x) = (x-1)^2 Q(x)$, em que $Q(x)$ é o quociente entre $P(x)$ *e* $(x-1)^2$.
Assim, dividindo $P(x)$ por $(x-1)^2$, obtém-se $Q(x) = x^2 - 3x - 4$.
Portanto as outras raízes são obtidas resolvendo a equação $Q(x) = x^2 - 3x - 4 = 0$, ou seja, $x = 4$ *ou* $x = -1$.
Logo a diferença em valor absoluto das outras raízes é 5.

14 A sequência de termos positivos $(a_1, a_2, a_3, \dots a_n, \dots)$ é uma progressão geométrica de razão igual a q. Podemos afirmar que a sequência $(\log a_1, \log a_2, \log a_3, \dots \log a_n \dots)$ é:

A Uma progressão aritmética de razão q.
B Uma progressão geométrica de razão q.
C Uma progressão aritmética de razão $\log q$.
D Uma progressão geométrica de razão $\log q$.
E Uma progressão aritmética de razão $(\log a_1 - \log q)$.

RESPOSTA: C

- A sequência $(a_1, a_2, a_3, \dots a_n, \dots)$ pode ser escrita sob a forma $(a_1, a_1 q, a_1 q^2, \dots, a_1 q^{n-1}, \dots)$, pois ela é uma progressão geométrica.
- A sequência $(\log a_1, \log a_2, \log a_3, \dots \log a_n \dots)$ pode ser escrita sob a forma $(\log a_1, \log a_1 q, \log a_1 q^2, \dots, \log a_1 q^{n-1} \dots)$, que é igual a $(\log a_1, \log a_1 + \log q, \log a_1 + 2\log q, \dots, \log a_1 + (n-1)\log q \dots)$.
- Portanto essa última sequência é uma progressão aritmética de razão $\log q$.

15 Após t horas do início de um vazamento de óleo de um barco em um oceano, constatou-se ao redor da embarcação a formação de uma mancha com a forma de um círculo cujo raio *r* varia com o tempo *t* mediante a função $r(t) = \dfrac{30}{\sqrt{\pi}} t^{0,5}$ metros. A espessura da mancha ao longo do círculo é de 0,5 centímetro.
Desprezando a área ocupada pelo barco na mancha circular, podemos afirmar que o volume de óleo que vazou entre os instantes $t = 4$ horas e $t = 9$ horas foi de:

A 12,5m^3
B 15m^3
C 17,5m^3
D 20m^3
E 22,5m^3

RESPOSTA: E

- Volume em metros cúbicos que vazou até t = 4:

$$V = \pi \left[r(4)\right]^2 (0{,}005) = \frac{\pi\, 900(4^{0,5})^2}{\pi}(0{,}005) = 18.$$

- Volume em metros cúbicos que vazou até t = 9:

$$V' = \pi \left[r(9)\right]^2 (0{,}005) = \frac{\pi\, 900(9^{0,5})^2}{\pi}(0{,}005) = 40{,}5.$$

- Volume em metros cúbicos que vazou entre t = 9 e t = 4:

$$\Delta V = 40{,}5 - 18 = 22{,}5.$$

Fim da Prova de Matemática